

Praktische Fehlerrechnung

entstanden in Beeskow 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Fehlerarten und deren Ursachen	2
1.1 Systematische Fehler	2
1.2 Zufällige Fehler	3
2 Berechnung zufälliger Fehler	3
2.1 Meßreihen	3
2.2 Gewichteter Mittelwert	6
2.3 Poisson-Verteilung	6
2.4 Behandlung von „Ausreißern“	7
3 Berechnung eines Ergebnisses aus fehlerbehafteten Meßgrößen	7
3.1 Fehlerfortpflanzung	7
4 Anpassung von Funktionen an Meßwerte	9
4.1 Geradenanpassung	9
4.2 Anpassung nichtlinearer Funktionen	12

1 Fehlerarten und deren Ursachen

Messungen physikalischer Größen sind grundsätzlich fehlerbehaftet, d.h. man erhält Messwerte, die vom wahren Wert mehr oder weniger abweichen. Je nach Ursache der Abweichung unterscheidet man zwischen systematischen und zufälligen Fehlern. In diesem Skript wird ein Fehler grundsätzlich mit dem Symbol Δ gekennzeichnet, beispielsweise wird der Fehler einer Zeitmessung t mit Δt bezeichnet. Alle Fehlerarten können:

Absolut:	$\Delta t,$	$t = (10 \pm 1) \text{ s}$	oder	$t = 10 \text{ s}, \Delta t = 1 \text{ s}$
			oder	$t = 10(1) \text{ s}$
Relativ:	$\Delta t/t$	$t = 10(1 \pm 0,1) \text{ s}$	oder	$t = 10 \text{ s}, \Delta t/t = 0,1$
Prozentual:	$\Delta t/t \cdot 100\%$	$t = 10(1 \pm 10\%) \text{ s}$	oder	$t = 10 \text{ s}, \Delta t = 10\%$

angegeben werden, sollten aber bevorzugt relativ angegeben werden.

Fehler werden üblicherweise einstellig, maximal zweistellig angegeben und **immer aufgerundet**. Das Ergebnis wird stets so gerundet, daß es genauso viele Stellen nach dem Komma besitzt wie der Fehler. Dabei werden Fehler mit zwei Stellen angegeben, wenn sich durch Auf- und Abrunden des Fehlers der relative Fehler etwa verdoppeln würde.

Beispiel: Man hat eine Zeit von 10 s mit einem absoluten Fehler von 0,11 s bestimmt. Der relative Fehler beträgt hierbei $\frac{0,11 \text{ s}}{10 \text{ s}} = 0,011 = 1,1\%$. Würde man 0,11 s auf 0,2 s runden, so wäre der relative Fehler $\frac{0,2 \text{ s}}{10 \text{ s}} = 0,2 = 2\%$, d.h. er hätte sich fast verdoppelt. Hier würde man den Fehler also mit zwei Stellen angeben.

Richtig:	$t = (10 \pm 1) \text{ s}$	$t = (10,12 \pm 0,01) \text{ s}$	$t = (10,1234 \pm 0,0012) \text{ s}$
Falsch:	$t = (10,1 \pm 1) \text{ s}$	$t = (10,1 \pm 0,01) \text{ s}$	$t = (10,1234 \pm 0,0123) \text{ s}$

1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler haben ein bestimmtes Vorzeichen und werden zum Beispiel hervorgehoben durch:

- Unvollkommenheit der Meßgeräte, z.B. Funktionsfehler, Eichfehler
Beispiel: Bei Kurzschluß der Eingänge zeigt ein Voltmeter u.U. nicht 0 V an (Nullpunktsfehler).
- Unvollkommenheit der Meßverfahren, z.B. Beeinflussung der Meßgröße durch die Messung
Beispiel: Durch den Innenwiderstand eines Voltmeters sind so gemessene Strom- oder Spannungswerte stets zu klein (Abweichungen i.d.R. jedoch vernachlässigbar)
- Konstante oder langsam veränderliche vernachlässigte Einflüsse, wie z.B. Reibungsverluste, Druckerhöhung, Temperaturdrift, thermische Ausdehnung, statische Aufladung usw.
Beispiel: Bei einem Pendelversuch wird durch die Luft- und Lagerreibung die Schwingung gedämpft, wodurch die Frequenz der Schwingung verringert wird.

- Konstante oder langsam veränderliche elektrische, magnetische und optische Streufelder, z.B. „Elektromog“ vom eigenen oder von anderen Experimenten, Erdmagnetfeld, Streulicht

Beispiel: Beim einem Beugungsversuch mit Mikrowellen zeigt die Empfangsdiode keine deutlichen Minima, da der Raum mit Mikrowellenstreustrahlung durch Wandreflektionen erfüllt ist. Bei einem Gittermonochromator fällt auch Licht der halben und der doppelten Wellenlänge auf den Austrittsspalt (sofern in der Lichtquelle vorhanden). Dadurch werden gemessene Absorptionen zu klein.

Systematische Fehler sollten nach Möglichkeit vermieden oder kleingehalten werden. **Sie sind nicht Gegenstand einer Fehlerrechnung.**

1.2 Zufällige Fehler

Zufällige Fehler besitzen beiderlei Vorzeichen und entstehen vor allem durch:

- Naturgesetze, z.B. Zählstatistik aufgrund der statistischen Natur von Kernzerfällen
- Unzulänglichkeiten der Sinnesorgane des Menschen, wie Reaktionszeit, Sehvermögen
Beispiel: Unterschiedliche Reaktionszeiten beim Arbeiten mit einer Stoppuhr
- Ungeschicklichkeit beim Messen und Ablesen
Beispiel: Parallaxenfehler beim Ablesen eines Zeigerinstrumentes aus unterschiedlichen Blickrichtungen.
- Statistisch schwankende äußere und innere Einflüsse, wie z.B. Schwankungen der Umgebungsparameter (Druck, Temperatur, Luftfeuchtigkeit etc.), Schwankungen der Ausgangsparameter, Schwingungen, Widerstandsrauschen etc.
Beispiel: Schwankungen der Drehgeschwindigkeit des Drehspiegels bei der Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Foucault durch Netzschwankungen.
- Toter Gang, Spiel und Reibung bei mechanischen Bewegungen, z.B. bei Verstellrichtungen, aber auch bei Zeigern an Meßgeräten
Beispiel: Schwankungen des tatsächlichen Vortriebs beim Verstellen des Endspiegels des Michelson-Interferometers mittels einer Mikrometerschraube durch deren Spiel.

2 Berechnung zufälliger Fehler

2.1 Meßreihen

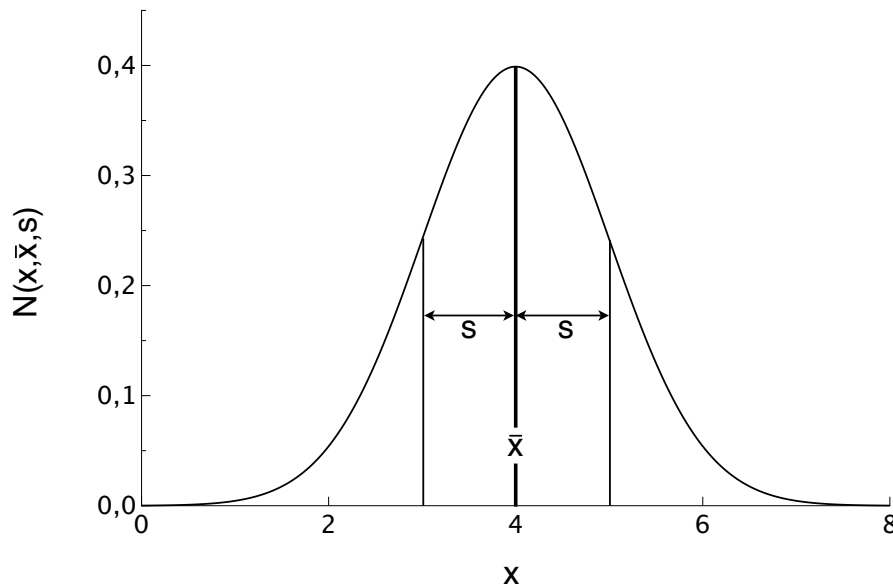
Wird die Messung im Rahmen einer Meßreihe mehrfach durchgeführt, so streuen die Meßwerte um einen Mittelwert. Je häufiger die Messung durchgeführt wird, um so näher liegt der Mittelwert am wahren Wert und umso kleiner wird der Fehler des Mittelwertes.

Wird eine Größe in einem Experiment n -fach gemessen, so streuen alle Meßwerte x_i um einen Mittelwert \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Dabei sind große Abweichungen vom Mittelwert seltener als kleine. Trägt man die Häufigkeit N , mit der ein Meßwert auftritt, über dem Meßwert auf, ergibt sich im Grenzfall einer unendlichen Anzahl von Messungen eine **Normalverteilung** (Glockenkurve, Gaußkurve):

$$N(x, \bar{x}, s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}} \quad (2)$$



Die Breite der Gaußkurve ist ein Maß für die Qualität des Experimentes. Sie wird durch die Standardabweichung s beschrieben (s^2 wird Varianz genannt) und gibt auch gleichzeitig den mittleren Fehler der Einzelmessung an. Daher ist es ratsam, innerhalb einer Vorauswertung schon während des Experiments über das Ermitteln der Standardabweichung Aufschluß über die Qualität des Versuchsergebnisses zu erhalten.

Für eine endliche Anzahl n von Messungen läßt sich die Standardabweichung aus den Meßwerten durch

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

schätzen. Mit $x \pm s$ wird ein Bereich unter der Gausskurve erfasst, in dem 68,3% aller Meßwerte liegen, mit $x \pm 2s$ erfasst man 95,4%, mit $x \pm 3s$ erfasst man 99,7%.



Eine Vergrößerung der Zahl der Messungen führt zwar zu einer Verbesserung des Mittelwertes, **nicht aber zu einer Verkleinerung von s , da die Anzahl der Messungen die Genauigkeit der Einzelmessung nicht beeinflusst.**

Der uns normalerweise interessierende Fehler, nämlich der statistische Fehler des Mittelwertes einer Meßreihe, errechnet sich aus der Standardabweichung s einfach durch

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (4)$$



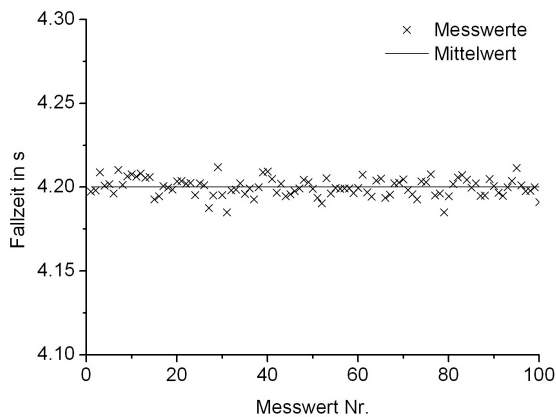
Der Fehler eines Mittelwertes einer Meßreihe errechnet sich aus der Standardabweichung durch Teilen durch \sqrt{n} . **Will ich meinen Fehler halbieren, muß ich die Zahl der Messungen vervierfachen.** $\Delta\bar{x}$ ist der anzugebende Fehler, wenn ein Ergebnis aus einer Mittelwertbildung gewonnen wurde.

Die Formeln für s und $\Delta\bar{x}$ gelten streng genommen nur für große n ($n > 100$). Für kleinere n ist $\Delta\bar{x}$ mit folgenden Faktoren zu multiplizieren:

n	3	4	5	6	8	10	20
Sicherheit 68,3%	1,32	1,20	1,15	1,11	1,08	1,06	1,03
Sicherheit 99,7%	19,2	9,2	6,6	5,5	4,5	4,1	3,4

Beispiel 1: Bestimmung der Erdbeschleunigung durch Fallversuche

Eine Kugel wird 100 mal aus 1 m Höhe fallen gelassen und dabei die Fallzeit gemessen. Aus dem für die Fallstrecke geltenden Zusammenhang $s = \frac{1}{2}gt^2$ folgt für die Bestimmung der Erdbeschleunigung $g = \frac{2s}{t^2}$. Zunächst müssen für die weitere Auswertung die gemessenen Zeiten gemittelt werden. Diese sind im folgenden graphisch dargestellt:



Nun wird nach Formel (1) der Mittelwert bestimmt. Anschließend werden mit Formel (3) und (4) die Standardabweichung und der Fehler des Mittelwerts bestimmt:

$$\begin{aligned} \text{Mittelwert} & 4,2000 \text{ s} \\ \text{Standardabweichung} & \pm 0,005 \text{ s} \\ \text{Fehler des Mittelwerts} & \pm 0,0005 \text{ s} \end{aligned}$$

Würde man nur die ersten 10 Zeitmessungen zur Mittelwertbildung heranziehen, erhielte man nach korrekter Rundung folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \text{Mittelwert} & 4,210 \text{ s} \\ \text{Standardabweichung} & \pm 0,005 \text{ s} \\ \text{Fehler des Mittelwerts} & \pm 0,002 \text{ s} \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, das zwar die Standardabweichung gleich geblieben ist, der Fehler des Mittelwertes jedoch größer ist und somit das Meßergebnis insgesamt schlechter zu bewerten ist. Grundsätzlich ist bei einer Mittelwertbildung darauf zu achten, ausreichend viele Meßwerte aufzunehmen.

2.2 Gewichteter Mittelwert

Sind die Meßfehler im Rahmen einer Meßreihe von Meßwert zu Meßwert stark unterschiedlich (unterscheiden sich um Größenordnungen), z.B. dadurch, daß sie durch unterschiedliche Meßverfahren gewonnen wurden, sollten die einzelnen Meßwerte bei der Mittelwertbildung entsprechend ihres Fehlers gewichtet werden. Dafür wird folgende Formel verwendet:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta x_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta x_i^2}} \quad (5)$$

Hierbei werden die Meßwerte vor dem Aufaddieren durch das Quadrat ihrer Fehler geteilt, daher tragen die Meßwerte mit kleineren Fehlern stärker zum gewichteten Mittel bei als die mit größerem Fehler. Den Fehler von \bar{x} erhält man dann aus:

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta x_i^2}}} \quad (6)$$

Beispiel 2: Fallversuche mit verschiedenen genauen Uhren

Die Erdbeschleunigung soll wie in Beispiel 1 durch Fallversuche bestimmt werden, jedoch wird nun für 5 Messungen eine Uhr mit einem relativen Fehler von $\pm 10\%$ verwendet und für weitere 5 Messungen eine (ungleich besser geeignete) Uhr mit einem relativen Fehler von $\pm 1\%$ verwendet. Es werden folgende Fallzeiten ermittelt:

$t_1 = 4,97 \text{ s}$	$t_2 = 4,86 \text{ s}$	$t_3 = 3,96 \text{ s}$	$t_4 = 4,17 \text{ s}$	$t_5 = 3,57 \text{ s}$
$t_6 = 4,21 \text{ s}$	$t_7 = 4,24 \text{ s}$	$t_8 = 4,30 \text{ s}$	$t_9 = 4,18 \text{ s}$	$t_{10} = 4,27 \text{ s}$

Mit Formel (5) und (6) werden nun das gewichtete Mittel und dessen Fehler berechnet. Als Ergebnis erhält man $\bar{T} = (4,24 \pm 0,02) \text{ s}$.

Durch Verwenden des gewichteten Mittels erhalten die Messungen mit der genaueren Uhr ein höheres statistisches Gewicht und dominieren so die Mittelwertbildung.

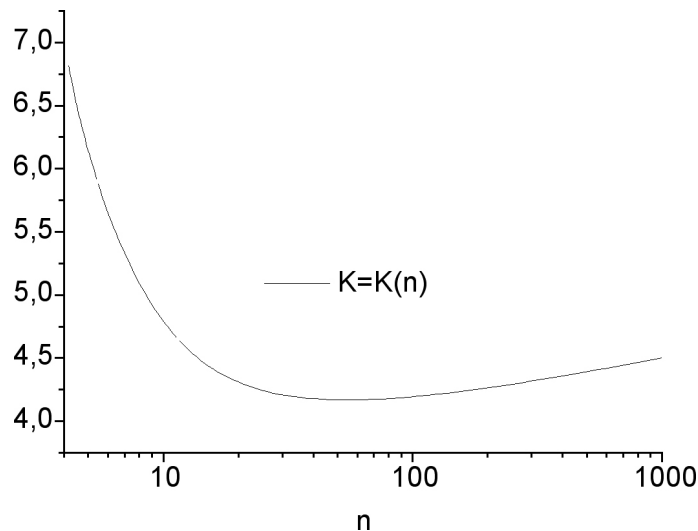
2.3 Poisson-Verteilung

Ergebnisse von Experimenten, bei denen Ereignisse gezählt werden, die zufällig, aber mit einer bestimmten mittleren Rate detektiert werden, gehorchen der Poisson-Verteilung. Sie beschreibt Vorgänge, die in jedem Zeitintervall mit einer festen Wahrscheinlichkeit eintreten können. Für hohe mittlere Zählraten geht die Poisson-Verteilung in die Gaußverteilung über (siehe auch [Taylor, 184ff]).

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Poisson-Verteilung ist die Tatsache, dass ihre Standardabweichung der Wurzel ihres mittleren Zählwertes entspricht. Daher kann man bei einem Zählexperiment bei dem N Ereignisse detektiert werden den Fehler der Zählrate mit $\Delta N = \sqrt{N}$ abschätzen.

2.4 Behandlung von „Ausreißern“

Manchmal kann es vorkommen, dass eine Größe mehrmals gemessen wird und einige Messwerte deutlich aus dem Rahmen fallen. Unter welchen Umständen darf man solche Messwerte in der weiteren Auswertung verwerfen, ohne unseriös zu werden, also das Messergebnis unerlaubt zu beschönigen? Dazu gibt es ein Kriterium (siehe z.B. [Kuchling]), das auf der Funktion $K(n)$ basiert, die in der folgenden Abbildung dargestellt ist:



Ein Messwert y_n darf dann weggelassen werden, wenn

$$y_n > \bar{y} + K \cdot s \quad \text{oder} \quad y_n < \bar{y} - K \cdot s \quad (7)$$

wobei \bar{y} und s der Mittelwert und die Standardabweichung ohne den Messwert y_n sind.

3 Berechnung eines Ergebnisses aus fehlerbehafteten Meßgrößen

3.1 Fehlerfortpflanzung

Wenn eine gesuchte Größe $A(x, y, z, \dots)$ nicht direkt messbar ist, sondern aus den gemessenen Größen x, y, z, \dots mit den Fehlern ¹ $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ errechnet werden muss, ist das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß anzuwenden:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \Delta z\right)^2 + \dots} \quad (8)$$

¹Die Messwerte x, y, z und ihre Fehler können dabei zum Beispiel durch Messreihen ermittelt worden sein.

Zur Veranschaulichung soll hier exemplarisch die Formel für nur einen Parameter x betrachtet werden. Die Messgröße ist hierbei x , der zu berechnende Wert $A(x)$. Die Formel für den Fehler lautet dann

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} \Delta x\right)^2} \quad (9)$$

Betrachtet man nun $A(x)$ als eine Funktion, so stellt $\frac{\partial A}{\partial x}$ die Steigung der Funktion am Ort x dar. Es ist also ein Maß dafür, wie stark die gemessene Größe x in die Formel eingeht. Ist die Steigung gering, geht der Wert wenig ein, ist die Steigung hoch, geht der Fehler stark ein. Mit dieser Gewichtung des Wertes wird nun der vorher bestimmte Fehler Δx multipliziert und so der Fehler $\Delta A(x)$ bestimmt. Die Wurzel und das Quadrat sorgen bei nur einer Messgröße für ein positives $\Delta A(x)$, um das der Wert $A(x)$ nach oben oder unten verschoben wird. Bei zwei Messgrößen x, y addiert sich diese Verschiebung von $A(x)$ nicht arithmetisch, sondern sie berechnet sich nach Pythagoras.

Das explizite Ausrechnen der partiellen Differentialquotienten kann man sich in einigen Fällen ersparen:

Ist A eine Summe der Messgrößen $A = ax + by + \dots$ gilt für den **absoluten** Fehler:

$$\Delta A = \sqrt{(a\Delta x)^2 + (b\Delta y)^2 + \dots} \quad (10)$$

Ist A ein Potenzprodukt der Messgrößen $A = x^{\pm a} \cdot y^{\pm b} \cdot \dots$ gilt für den **relativen** Fehler:

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(a \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

Diese Formeln kann man leicht nachprüfen, indem man jeweils die Formel für A in die allgemeine Gaußsche Fehlerfortpflanzungsformel einsetzt.

Beispiel 3: Bestimmung der Erdbeschleunigung durch Fallversuche

Aus den in Beispiel 1 gemittelten Werten soll nun mit Hilfe der Formel $g = \frac{2s}{t^2}$ die Erdbeschleunigung errechnet werden. Der Fehler lautet dann:

$$\Delta g(s, t) = \sqrt{\left(\frac{\partial g(s, t)}{\partial s} \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial g(s, t)}{\partial t} \Delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \Delta s\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{2s}{t^3} \Delta t\right)^2}$$

Der Mittelwert der Zeitmessung wurde oben zu $\bar{t} = (4,2000 \pm 0,0005) \text{ s}$ bestimmt. Der Mittelwert der Längenmessung sei $\bar{s} = (0,865 \pm 0,002) \text{ m}$. Dann folgt:

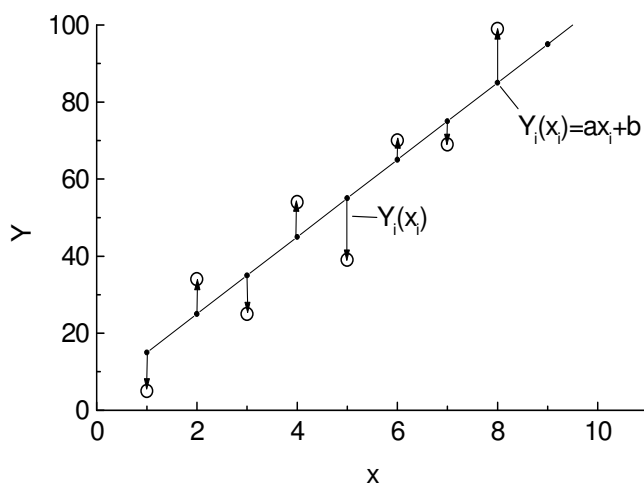
$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{\left(\frac{2}{(0,42 \text{ s})^2} \cdot 0,002 \text{ m}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{2 \cdot 0,865 \text{ m}}{(0,42 \text{ s})^3} \cdot 0,0005 \text{ s}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{0,0005 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4} + 0,0005 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}} \approx 0,033 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Das Versuchsergebnis lautet also $g = (9,86 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$.

4 Anpassung von Funktionen an Meßwerte

4.1 Geradenanpassung

Wenn sich die gesuchte Größe nicht analytisch aus den Meßwerten errechnen läßt, sondern durch Anpassen einer Gerade an die Meßwerte ermittelt werden muß, gibt es ein einfaches analytisches Verfahren: Die lineare Ausgleichsrechnung oder **lineare Regression**. Man trägt die Größe mit der größeren Unsicherheit auf der y -Achse auf und nimmt an, daß die zufälligen Fehler der Meßgrößen normalverteilt sind. Gesucht wird die Gerade $Y(x) = a + b \cdot x$, für die die Summe der Fehlerquadrate $\chi^2 = \sum_{i=1}^n (Y(x_i) - y_i)^2$ (gesprochen *Chi-Quadrat*, im englischen auch: *least square*) minimal wird.



Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Gleichung für χ^2 und Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach den Parametern a und b (Bestimmung des Extremums von χ^2), erhält man pro Parameter eine Gleichung, also ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen (Normalgleichungen). Im Fall einer Gerade lassen sich daraus sofort Bestimmungsgleichungen für a und b angeben:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (12)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (13)$$

Die Fehler der so gewonnenen Parameter a und b ergeben sich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Dazu benötigt man allerdings den Fehler der Einzelmessungen. Im einfachsten Fall nimmt man den Fehler für alle x_i als gleich an. Der mittlere Fehler der Einzelmessung läßt sich dann analog zur Standardabweichung aus der Streuung der Meßwerte y_i um die Ausgleichsgrade berechnen. Also konkret

$$\Delta y = s' = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y(x_i) - y_i)^2} \quad (14)$$

Damit ergeben sich die Fehler der Parameter zu

$$\Delta a = \pm \sqrt{\frac{s'^2 \cdot n}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}} \quad ; \quad \Delta b = \pm \sqrt{\frac{s'^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}} \quad (15)$$

Für den Fall, daß die Δy_i individuell betrachtet werden müssen, werden folgende Formeln verwendet:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta y_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta y_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta y_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta y_i^2}\right)^2} \quad (16)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\Delta x_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta y_i^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta y_i^2}\right)^2} \quad (17)$$

In der Praxis wird eine solche Anpassung mit einem Rechner durchgeführt, man benutzt dafür Programme wie Origin oder gnuplot. Das Vorgehen ist in den folgenden Beispielen gezeigt.

Beispiel 4: Hook'sches Gesetz

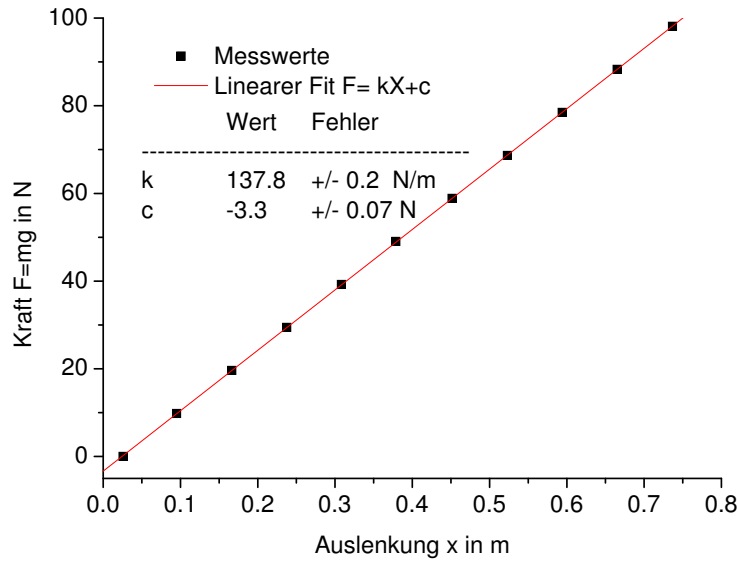
Betrachten wir nun die Längenänderung einer Feder in Abhängigkeit von der angehängten Masse. Man erwartet einen linearen Zusammenhang, da die Längenänderung dem Hookschen Gesetz gehorcht:

$$F_G = m \cdot a = k \cdot x = F_{Feder}$$

Folgende Werte werden im Experiment ermittelt:

Masse in kg	0	1	2	3	4	
Auslenkung in cm	2,58	9,51	16,64	23,75	30,84	
Masse in kg	5	6	7	8	9	10
Auslenkung in cm	37,88	45,16	52,31	59,4	66,52	73,67

Ziel ist es, die Federkonstante k zu bestimmen. Theoretisch erwartet man eine durch den Nullpunkt gehende Gerade. Dennoch ist es sinnvoll eine lineare Regression durchzuführen ohne den Durchgang durch den Punkt $(0,0)$ zu erzwingen, also eine Funktion $Y(x) = a + b \cdot x$ anzusetzen. Dadurch kann man einen eventuell auftretenden systematischen Fehler bestimmen, da ein solcher eine parallele Verschiebung der Gerade zur Folge hat:



Mit der angesetzten Gerade $Y(x) = a + b \cdot x$ ermittelt Origin mit Hilfe der im Abschnitt 4.1 (Gleichungen (12), (13) und (15)) beschriebenen Methode die Parameter a und b zu

$$a = (-3,3 \pm 0,07) \text{ N} \text{ und } b = (137,8 \pm 0,2) \text{ N/m.}$$

Offensichtlich gab es bei unserer Messung einen systematischen Fehler, der die Verschiebung der Geraden um a hervorgerufen hat.

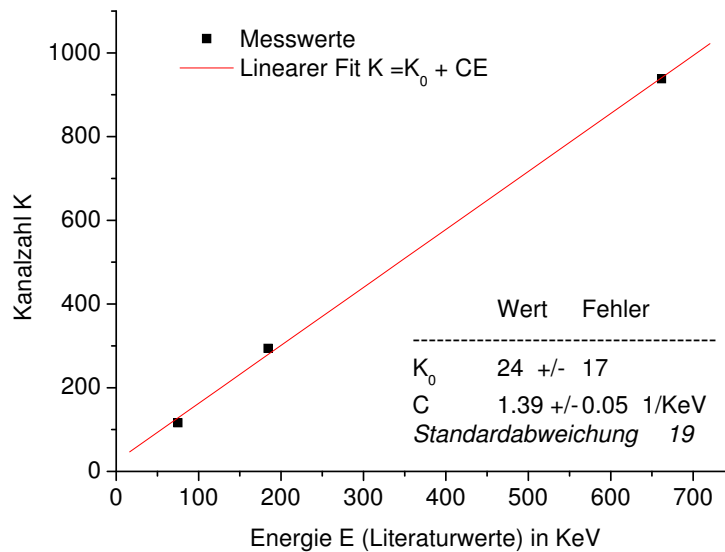
Beispiel 5: Kalibrieren des Multi-Channel-Analyzers (MCA) mit Hilfe des ^{137}Cs -Spektrums:

Die Aufgabe besteht darin, den Kanälen eines MCAs Energiewerte zuzuordnen. Hierzu wird das Spektrum eines ^{137}Cs -Präparates aufgenommen, dessen Energiewerte aus der Literatur genau bekannt sind. Die Kanalzahlen der Linien werden durch Ablesen der Kanalzahl des Maximums bestimmt.

Es ergeben sich folgende Zuordnungen:

Name des Peaks	Kanal	Energie in keV
Röntgenpeak	116	74,97
Rückstreupeak	294	184,32
Photopeak	938	661,66

Da hier die Kanalzahlen die fehlerbehafteten Größen sind, während die Energien aus der Literatur sehr genau bekannt sind, wird als quasi fehlerfreier x -Wert die Energie gewählt und eine lineare Regression ausgeführt:



Mit Hilfe der Kalibrierwerte K_0 und C sollen nun für ein unbekanntes Präparat die Energie ermittelt werden. Durch Ablesen wird die Kanalzahl 743 ermittelt. Die Energie errechnet sich dann aus $E = (K - K_0)/C = (743 - 24)/1,39 \text{ keV} = 517,266 \text{ keV}$. Der Fehler dieses Energiewertes ergibt sich am einfachsten aus der Standardabweichung der Kanalzahlen der Kalibriermessung, also der Streuung der Messpunkte um die Gerade, da diese die mittlere Abweichung einer einzelnen Kanalbestimmung von der Regressionsgerade angibt. Der Kalibrierwert $1/C$ ergibt $0,72 \text{ keV/Kanal}$. Aus der Standardabweichung ergibt sich als mittlerer Fehler einer einzelnen Kanalbestimmung $K = 19 \text{ Kanäle}$ und somit als gute Abschätzung des Fehlers von E der Wert $\Delta E = 19 \text{ Kanäle} \cdot 0,72 \text{ keV/Kanal} = 14 \text{ keV}$. Also gerundet: $E = (0,52 \pm 0,02) \text{ MeV}$.

Die Berechnung von ΔE per Fehlerfortpflanzung ist wesentlich umständlicher und nur notwendig, wenn sich die Kalibriermessung von der eigentlichen Messung methodisch oder in der Auflösung unterscheidet. Erstens muß dabei beachtet werden, dass man zwar durch eine große Anzahl von Kalibrierpunkten den Fehler der Kalibrierparameter beliebig klein machen kann, die Streuung der Kalibrierpunkte um die Gerade jedoch nicht. Entscheidend bleibt immer der Fehler einer einzelnen Kanalzahlbestimmung. Zweitens ist der x -Wert vom Schwerpunkt der Kalibrierpunkte aus zu ermitteln, da ansonsten der Fehler ungerechtfertigterweise mit der Kanalzahl linear zunehmen würde (siehe auch [Taylor]).

4.2 Anpassung nichtlinearer Funktionen

Hat man es mit einem Problem zu tun, bei dem zwischen den Meßwerten und den Parametern der die Messung beschreibenden Funktion ein nichtlinearer Zusammenhang besteht, gibt es zwei Möglichkeiten der nichtlinearen Ausgleichrechnung. Entweder läßt sich das Problem auf

einen linearen Zusammenhang zurückführen, wie z.B. bei

$$Y = b \cdot e^{ax} \Rightarrow \ln Y = ax + \ln b \quad (18)$$

und man kann die lineare Regression anwenden. Dazu setzt man in diesem Beispiel $y'_i = \ln y_i$ und $\Delta y'_i = \ln \Delta y_i$ und verwendet in allen Formeln die gestrichenen Größen.

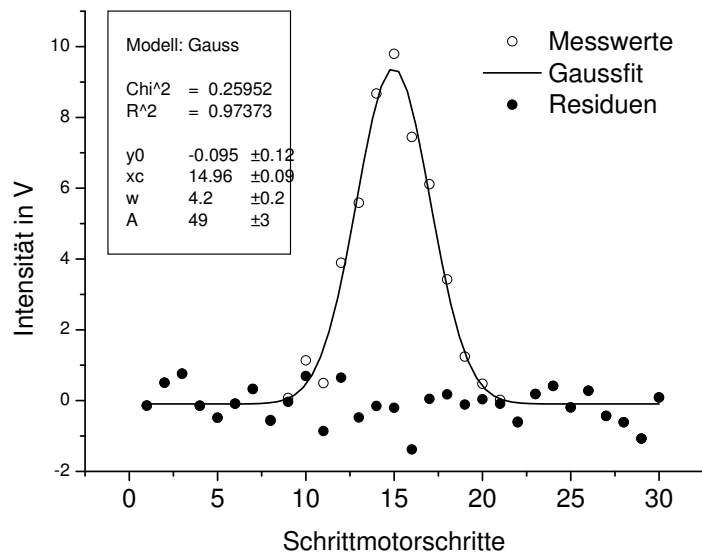
Ist eine solche Rückführung nicht möglich, wird seit Anbruch des Computerzeitalters eine iterative Anpassung der Funktionsparameter an die Messwerte praktiziert (fitten $\hat{=}$ anpassen). Dabei wird - wie bei der linearen Regression - χ^2 minimiert. Man nimmt dabei an, dass die Messdaten durch eine Funktion $f(a, b, c, \dots)$ beschrieben werden können, die von mehreren Parametern a, b, c, \dots abhängt (z.B. $Y = a \cdot e^{bx} + c$), und steht vor folgendem Problem: Finde den Parametersatz a, b, c, \dots , für den

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (Y(x_i, a, b, c, \dots) - y_i)^2 \quad (19)$$

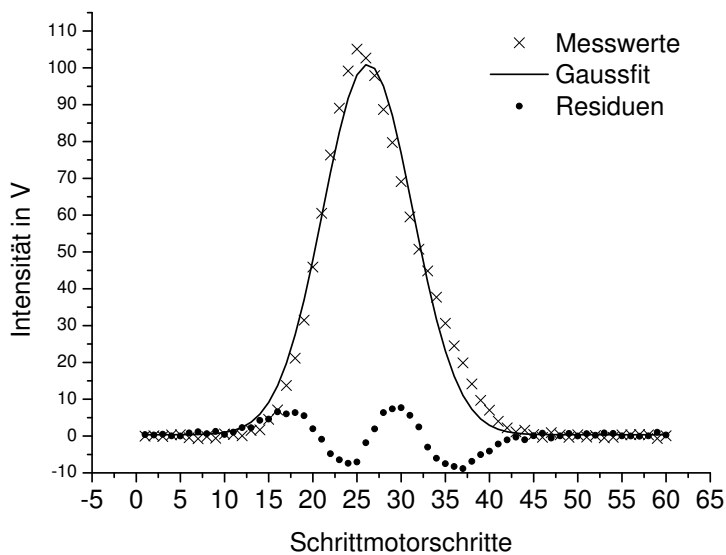
minimal wird. Das Standardverfahren zur Lösung dieses Problem ist die Levenberg-Marquard Methode. Dabei wird ausgehend von einem willkürlich gewähltem Satz Startparameter (z.B. alle 1 o.ä.) - ähnlich wie bei der linearen Regression - wieder ein Gleichungssystem aufgestellt, in das nun aber neben den ersten auch die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion nach den Parametern eingehen. Dies wird durch einen Vergleich mit der Kurvendiskussion plausibel: Zum Auffinden eines Minimums wird die 1. und 2. Ableitung der Funktion benötigt. Das Verfahren arbeitet iterativ, d. h. die gleiche Rechenprozedur wird bis zum Erreichen einer Abbruchbedingung immer wiederholt: Methodisch passiert dann folgendes: Ausgehend von Startparametern und einer Startvariation wird zyklisch das Gleichungssystem gelöst, χ^2 errechnet und unter Verwendung der Ableitungen verbesserte Parameter ermittelt. Wird χ^2 kleiner werden die Parameter übernommen und die Variation der Parameter verkleinert. Wird χ^2 größer, wird die Variation der Parameter vergrößert. Wird die Änderung von χ^2 kleiner als eine Abbruchbedingung vorgibt, wird der Fit beendet. Wenn der Fit divergiert (das Ergebnis ist offensichtlich unsinnig), bedeutet das in der Regel, daß entweder die Startparameter völlig falsche Größenordnungen haben oder die verwendete Modellfunktion $f(a, b, c, \dots)$ die Messwerte nicht adäquat beschreibt.

Die Fehler so ermittelter Parameter werden von vernünftigen Fitprogrammen (z.B. Origin) mit ausgegeben und ergeben sich für den Fall normalverteilter Messfehler streng mathematisch aus der Kovarianzmatrix, die beim Lösen des Gleichungssystems aufgestellt wird (siehe z.B. [Press]). Anschaulicher gesagt geben sie an, wie weit ein Parameter beim Festhalten aller anderen Parameter verändert werden kann, bis sich χ^2 um einen bestimmten Wert erhöht, der sich aus der Streuung der Messpunkte um die gefittete Kurve bestimmt. Im Fall nicht normalverteilter Messfehler ist die Fehlerermittlung eine komplexere Prozedur und wird hier nicht behandelt.

Um zu prüfen, ob die Modellfunktion die Messdaten beschreibt, sollte man die Residuen, d. die Differenzen zwischen gefitteter Funktion und den Messwerten betrachten. Wenn dies statistisch um Null streuen ist das Modell adäquat, wenn nicht geben die Abweichungen oft schon einen Hinweis, wo die Problematik in der Modellannahme steckt. Hierzu ein Beispiel:

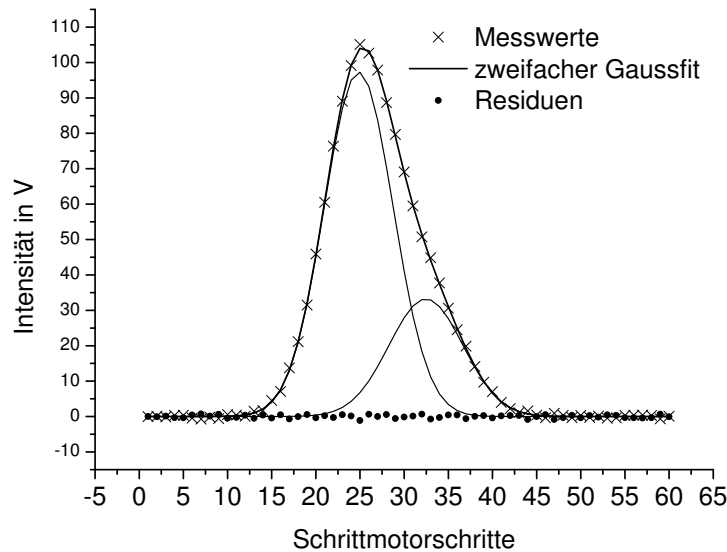


Hier wurde mit dem Gittermonochromator eine Spektrallinie aufgenommen. Zur Bestimmung der Linienposition wurden die Messdaten um die Linie herum mit einer Gausskurve gefittet. Der Fit liefert die Position der Linie mit ihrem Fehler (x_c), die Breite w der Linie (Achtung: bei einer Gausskurve ist w nicht die Halbwertsbreite!), sowie die Fläche unter der Kurve A , die proportional zur Intensität der Spektrallinie ist. Die Residuen streuen statistisch um die Nulllinie, so dass der Fit an die Messdaten angemessen ist. Ein weiteres Beispiel zeigt die folgende Abbildung ².



²Die Ergebnisparameter wurden zugunsten der Übersichtlichkeit weggelassen.

Hier zeigen die Residuen eine auffällige Struktur und streuen nicht statistisch um die Nulllinie, was eindeutig auf eine fehlerhafte Modellfunktion hinweist. Ein versuchsweiser Fit mit zwei Gausskurven ergibt:



Die Residuen zeigen, dass es sich hier eindeutig um zwei nicht aufgelöste Gausskurven handelt, die Modellfunktion also eine Summe aus zwei Gausskurven sein muss.

Literatur

- [Taylor] John R. Taylor, „*Fehleranalyse*“, Wiley-VCH, Weinheim, 1. Auflage 1988
- [Kuchling] Horst Kuchling, „*Taschenbuch der Physik*“, Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 6. Auflage, 1984
- [Press] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, „*Numerical Recipes in Pascal, The Art of Scientific Computing*“, Cambridge University Press, Cambridge, Reprint 1999

Version vom 20.4.2006

Sollten Rechtschreibfehler oder auch inhaltliche Fehler, die ja nie ganz auszuschließen sind, entdeckt werden, bitten wir diese dem Projektlabor-Team mitzuteilen.